

Mathematische Grundlagen - 2

Eulersche φ - Funktion

- Die eulersche φ - Funktion einer Zahl N gibt an, wie viele natürliche Zahlen es gibt, die kleiner als N und teilerfremd zu N sind.
- Als Formel sieht dies so aus:

$$\varphi(N) = \#\{a \in \mathbb{N} \mid \text{ggT}(a, N) = 1 \text{ und } 1 \leq a < N\} \quad ?$$

Phi von N ist die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen a , für die gilt: $\text{ggT}(a, N) = 1$ und $1 \leq a < N$

Wichtige Eigenschaften der φ - Funktion

Für eine Zahl, die Produkt aus zwei Zahlen a und b ist, gilt:

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

Für Primzahlen p gilt:

$$\varphi(p) = p - 1$$

Für eine aus zwei Primzahlen zusammengesetzte Zahl $N = p * q$ gilt somit:

$$\varphi(N) = \varphi(p * q) = \varphi(p) * \varphi(q) = (p - 1)(q - 1)$$

Beispiel

Wir wollen $\varphi(10)$ berechnen:
Zunächst faktorisieren wir die Zahl

$$10 = 5 * 2$$

Da die Faktoren Primzahlen sind, können wir nun die Formel links verwenden:

$$\varphi(10) = \varphi(5) * \varphi(2) = 4 * 1 = 4$$

$$\varphi(5) = \#\{1, 2, 3, 4\} = 4 \quad \varphi(2) = \#\{1\} = 1$$

$$\varphi(10) = \#\{1, 3, 7, 9\} = 4$$

