

Das Intervallhalbierungsverfahren

Das Intervallhalbierungsverfahren (auch Bisektion genannt) ist ein Verfahren zur Lösung eines dafür geeigneten **Problems** in **endlichen vielen Schritten**. Die Idee dabei ist, die Problemgröße bei jedem Schritt zu halbieren.

Dieses Verfahren wird häufig in der Mathematik und Informatik angewandt.

Dabei möchte man z.B. (Funktions-)Werte in einem gegebenen Intervall für X-Werte, z.B. [34;254] (lies: Intervall von einschließlich 34 bis einschließlich 254) untersuchen, um beispielsweise eine Nullstelle einer Funktion zu finden.

Meist sind die Werte des Intervalls die Eingabewerte (X-Werte) für eine Funktion (y-Werte).

Die **Grundidee** ist, ein Intervall immer wieder in **zwei** kleinere Hälften zu teilen und dann diese Hälften zu untersuchen.

Somit wird die Problemgröße bei jedem (Intervallhalbierungs-)Schritt verringert, genauer: halbiert.

Eine fast intuitive Anwendung des Intervallhalbierungsverfahrens findet im Spiel Zahlenraten statt: Je nach Aussage „Gesuchte Zahl ist kleiner“ oder „Gesuchte Zahl ist größer“ wird der zu durchsuchende (zu ratende) Zahlenraum mit Hilfe der **binären Suche** eingeschränkt.

Ein einfaches Beispiel stellt folgende Aufgabe dar:

Gesucht ist eine Zahl zwischen 1 und 1000, die ein Spieler erraten soll. Er erhält als Hinweis immer nur „größer“ oder „kleiner“ oder „Treffer“.

Angenommen die Zahl sei 512. Verwendet der Spieler zum Raten das **Bisektionsverfahren** der binären Suche, ergibt sich folgender Dialog:

Spieler nimmt vom gesamten Intervall [1;1000] die Zahl in der „Mitte“¹ $(1+1000) \text{ DIV } 2 =$

1. 500 – „gesuchte Zahl ist größer“:
jetzt nimmt der Spieler die mittlere Zahl aus dem oberen Intervall von [500;1000]
2. 750 – kleiner:
jetzt nimmt der Spieler die mittlere Zahl aus dem unteren Intervall von [500;750]
3. 625 – kleiner
4. 562 – kleiner
5. usw.

Es lässt sich übrigens zeigen, dass die mittlere Anzahl der Rateschritte bei $\ln(1000+1) \approx 7$ liegt². Nach 10 Halbierungen beträgt bei diesem Intervall die Größe dieses Ausgangsintervalls auf jeden Fall nur noch 1 und damit ist die Zahl gefunden.

(Aufgabe: Untersuche ein selbst gewähltes Intervall auf die maximale Anzahl von Halbierungen)

Das Intervallhalbierungsverfahren ist nicht nur eine Spielstrategie beim Zahlenraten, sondern kann u.a. auch

- zum Berechnen von der Quadratwurzel einer Zahl oder
- zum Finden von Nullstellen (näherungsweise) einer Funktion

genutzt werden.

¹ DIV ist hier die ganzzahlige Division, d.h. $1001 \text{ DIV } 2 = 500$, $1002 \text{ DIV } 2 = 501$ usw.

DIV wird in Python durch // dargestellt: z.B.

`ergebnis = 1001 // 2` # Zuweisung des Ergebnisses der ganzzahligen Division von 1001 durch 2 an die Variable *ergebnis*:

² In bezeichnet hier den natürlichen Logarithmus zur Basis 2