

Das Intervallhalbierungsverfahren

Das Intervallhalbierungsverfahren (auch Bisektion genannt) ist ein Verfahren zur Lösung eines dafür geeigneten **Problems** in **endlichen vielen Schritten**. Die Idee dabei ist, die Problemgröße bei jedem Schritt zu halbieren.

Dieses Verfahren wird häufig in der Mathematik und Informatik angewandt.

Dabei möchte man z.B. (Funktions-)Werte in einem gegebenen Intervall für X-Werte, z.B. [34;254] (lies: Intervall von 34 bis 254) untersuchen, um beispielsweise eine Nullstelle einer Funktion zu finden.

Meist sind die Werte des Intervalls die Eingabewerte für eine Funktion.

Die Grundidee ist, ein Intervall immer wieder in zwei kleinere Hälften zu teilen und dann diese Hälften zu untersuchen.

Somit wird die Problemgröße bei jedem (Intervallhalbierungs-)Schritt verringert, genauer: halbiert.

Eine fast intuitive Anwendung des Intervallhalbierungsverfahrens findet im Spiel Zahlenraten statt: Je nach Aussage „Gesuchte Zahl ist kleiner“ oder „Gesuchte Zahl ist größer“ wird der zu durchsuchende (zu ratende) Zahlenraum mit Hilfe der binären Suche eingeschränkt.

Ein einfaches Beispiel stellt folgende Aufgabe dar:

Gesucht ist eine Zahl zwischen 1 und 1000, die ein Spieler erraten soll. Er erhält als Hinweis immer nur „größer“ oder „kleiner“ oder „Treffer“.

Angenommen die Zahl sei 512. Verwendet der Spieler zum Raten das Bisektionsverfahren der binären Suche, ergibt sich folgender Dialog:

Spieler nimmt vom gesamten Intervall [1;1000] die Zahl in der „Mitte“ $(1+1000) \text{ DIV}^1 2 =$

1. 500 – „gesuchte Zahl ist größer“:
jetzt nimmt der Spieler die mittlere Zahl aus dem oberen Intervall von [500;1000]
2. 750 – kleiner:
jetzt nimmt der Spieler die mittlere Zahl aus dem unteren Intervall von [500;750]
3. 625 – kleiner
4. 562 – kleiner
5. usw.

Es lässt sich übrigens zeigen, dass die mittlere Anzahl der Rateschritte bei $\ln(1000+1) \approx 7^2$ liegt. Nach 10 Halbierungen beträgt bei diesem Intervall die Größe dieses Ausgangsintervalls auf jeden Fall nur noch 1 und damit ist die Zahl gefunden.

(Aufgabe: Untersuche ein selbst gewähltes Intervall auf die maximale Anzahl von Halbierungen)

Das Intervallhalbierungsverfahren ist nicht nur eine Spielstrategie beim Zahlenraten, sondern kann u.a. auch

- zum Berechnen von der Quadratwurzel einer Zahl oder
- zum Finden von Nullstellen (näherungsweise) einer Funktion

genutzt werden.

¹ DIV ist hier die ganzzahlige Division, d.h. $1001 \text{ DIV} = 500$, $1002 \text{ DIV} 2 = 501$.

DIV wird in Python durch // dargestellt: $\text{ergebnis} = 1001 // 2$

² ln bezeichnet hier den natürlichen Logarithmus zur Basis 2